# Métodos topológicos en el análisis no lineal
# Clase 10 -7/10 (versión preliminar)

En la última clase estuvimos zoomidos en el estudio de ciertas propiedades topológicas que se deducen a partir del grado de Brouwer. Veamos ahora algunas aplicaciones a problemas de contorno.

Un resultado sobre el que podemos volver, en versión corregida y aumentada, es el de Nirenberg, ahora para $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ acotada. Tal como vimos en el caso $n = 2$, si $g$ tiene límites radiales

$$g_v := \lim_{r \to +\infty} g(rv)$$

uniformes en $v \in S^{n-1}$, entonces el problema

$$u'(t) + g(u(t)) = p(t)$$

tiene solución $T$-periódica para toda $p$ tal que... ¿qué? La condición para $n = 2$ era que la curva $\gamma(\theta) = g_{e^{i\theta}}$ se "enrosque" alrededor de $\overline{p}$, es decir: $I(\gamma, \overline{p}) \neq 0$. Para esto es natural pedir, en primera instancia:

$$g_v \neq \overline{p} \qquad v \in S^{n-1}.$$

Y la otra condición, como es de esperar, es que el número de vueltas de $g_v$, pensado como un campo en la esfera, sea distinto de 0 respecto de $\overline{p}$. Esto equivale a una condición mucho más fácil de entender para nuestro espíritu más habituado al grado de Brouwer:

$$\deg(g, B_R(0), 0) \neq 0 \qquad R \gg 0.$$

La novedad es que, en un pequeño esfuerzo de superación personal, el autor de estas notas encontró una demostración algo más sencilla respecto de la que vimos para $n = 2$. Observemos en primer lugar que $g_v$ es continua como función de $v$. Podemos suponer $\overline{p} = 0$; luego, si $u(t)$ es una solución con valor inicial $u(0) = u_0$, vale

$$|u(t) - u_0| = \left| \int_0^t (g(u(s)) + p(s))\, ds \right| \leq M := T(\|g\|_\infty + \|p\|_\infty).$$

Hasta aquí, ninguna novedad: el operador de Poincaré está bien definido y vale

$$P(u_0) - u_0 = \int_0^T g(u(t))\, dt.$$

Ahora escribimos $u_0 = rv_0$ para cierto $v_0 \in S^{n-1}$, entonces $u(t) = r[v + a(t)]$ con $|a(t)| \leq \frac{M}{r}$, de donde

$$u(t) = r(t)v(t),$$

con $v(t) \in S^{n-1}$,

$$|r(t) - r| \leq M, \qquad |v(t) - v| \leq \frac{M}{r}.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$ se deduce, para $r \gg 0$,

$$|g(u(t)) - g_v| \leq |g(u(t)) - g_{v(t)}| + |g_{v(t)} - g_v| < \varepsilon$$

y luego

$$|P(u_0) - u_0 - Tg_v| \leq \int_0^T |g(u(t)) - g_v| \, dt < T\varepsilon.$$

De esta forma, si elegimos $\varepsilon < \inf_{v \in S^{n-1}} |g_v|$ y miramos la función $\varphi(v) := P(rv) - rv$, se deduce que

$$|\varphi(v) - g_v| < |g_v|$$

para $r \gg 0$, de donde

$$\deg(\varphi, B_1(0), 0) = \deg(g_v, B_1(0), 0).$$

Es fácil verificar que este último grado coincide con $\deg(g, B_r(0), 0)$ para $r \gg 0$, que por hipótesis es distinto de 0 y el resultado queda probado.

Uno podrá preguntarse también qué será de aquella homotopía loca de Krasnoselskii. Y, para nuestra alegría, podemos verla reaparecer ahora en toda su gloria. Para el sistema

$$u'(t) + f(t, u(t)) = 0,$$

supongamos que existe $\Omega$ tal que:

1. Las soluciones con valor inicial $u_0 \in \overline{\Omega}$ están definidas en $[0, T]$.
2. Si $u_0 \in \partial\Omega$, entonces $u(t) \neq u_0$ para $0 < t \leq T$.
3. $f(0, u_0) \neq 0$ para $u_0 \in \partial\Omega$.

Entonces el operador de Poincaré satisface

$$\deg(I - P, \Omega, 0) = \deg(f(0, \cdot), \Omega, 0).$$

Para los desmemoriados, cabe recordar que la homotopía es simplemente

$$h(u_0, \lambda) = \begin{cases} \frac{u_0 - P_{\lambda T}(u_0)}{\lambda} & \text{si } \lambda > 0 \\ f(0, u_0) & \text{si } \lambda = 0, \end{cases}$$

que no se anula para $u_0 \in \partial\Omega$ debido a tan amables hipótesis. Esto sirve para demostrar un hecho interesante para funciones coercivas: si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1$ verifica

$$\lim_{|x| \to \infty} F(x) \to +\infty \qquad \text{y} \qquad \nabla F(x) \neq 0 \quad \text{para } |x| \geq R,$$

entonces $\deg(\nabla F, B_r(0), 0) = 1$ para $r \gg 0$.

La conclusión no parece demasiado extraña, ya que $F$ alcanza un mínimo absoluto y entonces su gradiente debe anularse; sin embargo, el resultado proporciona una información mucho más precisa. Para demostrar esto, se puede plantear el sistema autónomo $u'(t) + \nabla F(u(t)) = 0$ y usar el resultado anterior. Notar que si $u$ es solución con valor inicial $u(0) = u_0$, entonces multiplicando por $\nabla F(u(t)$ se ve que $F(u(t))$ es decreciente; más precisamente, para todo $t_0$ vale

$$F(u(t)) = F(u(t_0)) - \int_{t_0}^{t} |\nabla F(u(s))|^2\, ds$$

y, en particular, $F(u(t)) \leq F(u_0)$ para todo $t$. Como $F$ es coerciva, esto implica que $u(t)$ está definida para todo $t$; por otro lado, si $|u_0|$ es suficientemente grande la desigualdad anterior es estricta, ya que $\nabla F(u(t))$ al principio no se anula. Por el resultado de Krasnoselskii, vale

$$\deg(\nabla F, B_r(0), 0) = \deg(Id - P_T, B_r(0), 0)$$

donde $P_T$ es el operador de Poincaré para cualquier $T > 0$. Un último toque sutil muestra que si $r$ es grande se puede elegir $T$ de manera tal que $|P_T(u_0)| < r$ para $|u_0| = r$ lo cual, como todo lector aplicado podrá recordar, implica que $\deg(I - P_T, B_r(0), 0) = 1$. Dicho y hecho, fijemos $R$ tal que $\nabla F(u) \neq 0$ y $F(u) > 0$ si $|u| \geq R$ y $r > R$ tal que $F(u) > \max_{|v|\leq R} F(v)$ para $|u| \geq r$. Además, podemos elegir $\tilde{r}$ tal que $F(u) > M := \max_{|v|=r} F(v)$ para $|u| \geq \tilde{r}$. Supongamos ahora $|u(s)| \geq R$ para $s \leq t$, entonces $F(u(s)) < F(u_0)$, lo que implica que $|u(s)| < \tilde{r}$. Escribimos

$$F(u(t)) = F(u_0) - \int_0^t |\nabla F(u(s))|^2\, ds \leq F(u_0) - \gamma t < M - \gamma t,$$

donde $\gamma := \min_{R\leq |u| \leq \tilde{r}} |\nabla F(u)|^2$. Esto dice que a más tardar para $T = \frac{M}{\gamma}$ la solución se metió dentro de $B_R(0)$. Por otra parte, si alguna solución, de puro apurada, entró ahí un tiempito antes, digamos en $t_1$, entonces para $t \geq t_1$ vale $F(u(t)) \leq F(u(t_1))$, lo que implica $|u(t)| < r$. En otras palabras, encontramos el $T$ que estábamos buscando y podemos pasar a otra cosa. O quizás no, porque el envión nos puede servir para probar algunos otros resultados interesantes. Por ejemplo, la siguiente generalización del resultado anterior es una versión simplificada de un resultado de Amann [1]:

**Lema 0.1** *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$ y supongamos que para cierto $\beta$ tal que el conjunto $V_\beta := \{x : F(x) < \beta\}$ es acotado. Supongamos que para cierto $x_0$ y ciertos $\alpha < \beta$ y $r > 0$ vale*

$$\overline{V_\alpha} \subset B_r(x_0) \subset \overline{B_r(x_0)} \subset V_\beta$$

*y además*

$$\nabla F(x) \neq 0 \qquad \alpha \leq F(x) \leq \beta.$$

*Entonces* $\deg(F, V_\beta, 0) = 1$.

La relación con el resultado anterior es bastante clara: en principio, la coercividad implica que los conjuntos de sub-nivel $V_\beta$ son acotados para cualquier $\beta$. Pero, mejor todavía, si fijamos cualquier $\alpha$, siempre se puede encontrar $r > 0$ y $\beta > \alpha$ tal que vale la primera hipótesis del lema. El hecho de que $\nabla F$ no se anula para $|x| \geq R$ nos da la pista de qué $\alpha$ conviene tomar. Y si miramos con cuidado, la demostración anterior sirve también para probar el lema de Amann: solo cambian, según diría Borges, la hora, las circunstancias y uno o dos nombres propios.

Pero ya que hablamos de mínimos, un corolario del lema previo es que $F$ tiene un mínimo en cierto $x_0$ que además es un punto crítico aislado, entonces para $r$ chico vale $\deg(\nabla F, B_r(x_0), 0) = 1$. Intuitivamente es claro y el resultado sería trivial si el hessiano en $x_0$ fuera (estrictamente) definido positivo, como en un mínimo de los buenos: en ese caso, 0 sería un valor regular de $\nabla F$ y listo. Pero el problema es que el hessiano podría ser solamente semidefinido y la cosa se enchastra un poquito. Sin embargo, a partir del lema anterior la cuestión se resuelve en un periquete: supongamos por ejemplo que $x_0 = 0 = F(0)$ y fijamos $\beta = \min F(\overline{B}_{\rho_2}(0) \backslash B_{\rho_1}(0)) > 0$ para ciertos $\rho_2 > \rho_1 > 0$. Como $F(0) = 0$, es claro que existe $r > 0$ tal que $\overline{B_r(0)} \subset V_\beta$ y, además, poniendo por ejemplo $\alpha := \frac{1}{2} \min F(\overline{B}_{\rho_2}(0) \backslash B_r(0)) > 0$ resulta $\overline{V}_\alpha \subset B_r(0)$. Esto prueba que $\deg(\nabla F, V_\beta, 0) = 1$, y por escisión vale $\deg(\nabla F, B_r(0), 0) = 1$ para cualquier bola $B_r(0) \subset V_\beta$.

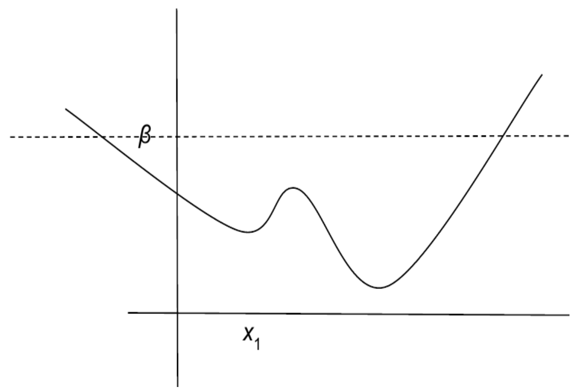
Una consecuencia interesante es una versión sumamente elemental del llamado *lema del paso de la montaña*. Supongamos para hacerlo más fácil que $F(x) \to +\infty$ para $|x| \to \infty$, de modo que alcanza un mínimo absoluto en cierto $x_0$ y además $x_1 \neq x_0$ es un mínimo local. Entonces $F$ tiene al menos otro punto crítico. Por supuesto, se puede ya suponer que se trata de puntos críticos aislados y $\nabla F$ no se anula para $|x| \gg 0$, porque en caso contrario, como aquel chiste del auto que va a contramano, no habría un punto crítico extra, sino "miles". Luego, ya sabemos que

$$\deg(\nabla F, B_r(x_0), 0) = \deg(\nabla F, B_r(x_1), 0) = 1$$

para $r$ chico y además, para $R \gg 0$ vale $\deg(F B_R(0), 0) = 1$. Por escisión, vale

$$\deg(\nabla F, B_R(0) \backslash (B_r(x_0) \cup B_r(x_1)) = -1$$

así que $\nabla F$ tiene al menos otro cero. El pintoresco nombre del lema surge de considerar la siguiente situación: supongamos que en $x_1$ hay un mínimo local, por ejemplo estricto, de manera que para algún $r > 0$ tenemos $F(x) > F(x_1)$ para $|x - x_1| = r$. Supongamos además que para otro valor $x_0$ más lejano tenemos $F(x_0) < F(x_1)$. Entonces podemos unir $x_1$ y $x_0$ mediante una curva $\gamma$, de modo que $F(\gamma(t))$ atraviesa el "cordón montañoso" para unir los respectivos puntos del gráfico. En cada una de esas curvas la función alcanza un máximo, pero -por ejemplo, si sufrimos de vértigo- podemos contratar un guía baqueano que sepa elegir el camino que minimiza esos máximos. Lo que uno esperaría es encontrar ahí un punto silla, que es efectivamente lo que dice el lema en algunas versiones algo más específicas (salvo, claro está, que se trate del caso $n = 1$, para el que las montañas no presentan una gran variedad de senderos). Más en general, vale el resultado si tenemos como antes $V_\beta$ acotado y contiene alguna bola cerrada $\overline{B}$, asumiendo que $x_1$ es un mínimo local pero no absoluto en $V_\beta$: en tal caso, es claro que el valor mínimo que toma la función en $\overline{B}$ es menor que $\beta$, lo que implica que el mínimo absoluto de $F$ en $\overline{V}_\beta$ se alcanza en el interior, así que sale todo como antes.




Entre las diversas aplicaciones del grado de Brouwer a problemas de contorno, podemos generalizar todo lo que vimos sobre shooting en dimensión 1 y 2, como hicimos con el resultado de Nirenberg. A modo de observación inespecífica, no está de más volver a insistir sobre las bondades de las cotas a priori, esta vez con un espíritu homotópico. Supongamos, por poner un ejemplo, que para el problema de Dirichlet

$$u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0$$

uno puede probar que hay cotas a priori. Mejor todavía, supongamos que existe $R$ tal que toda posible solución del sistema

$$u''(t) = \lambda f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0$$

con $\lambda \in [0,1]$ verifica $\|u\|_\infty < R$. Si además uno sabe que las soluciones de esta última ecuación con valores iniciales $u(0) = 0, u'(0) = r \in \mathbb{R}^n$ están definidas en $[0,T]$ para $|r| \leq R$, entonces el operador de shooting $S_\lambda$ tiene el mismo grado en $B_R(0)$ para todo $\lambda$. Esto dice que el grado $\deg(S_1, B_R(0), 0)$, que es el que nos interesa, coincide con $\deg(S_0, B_R(0), 0)$. Pero este último grado es fácil de calcular, porque $S_0(r) = rT$, así que su grado es 1. Por supuesto, esto es un ejemplo trivial, pero sirve para empezar a entender mejor por qué el caso resonante es más delicado: por ejemplo, para el problema periódico la ecuación $u''(t) = 0$ tiene como soluciones las constantes, así que no existe la menor esperanza de que la homotopía anterior nos lleve a buen puerto. Sin embargo, siempre tiene sentido moverse un poquito de la resonancia: por ejemplo, el problema

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

es obviamente equivalente a

$$u'(t) + au(t) = f(t, u(t)) + au(t),$$

así que una homotopía como la anterior nos llevaría a mirar el problema

$$u'(t) + au(t) = \lambda[f(t, u(t)) + au(t)]$$

o, si se prefiere:

$$u'(t) = \lambda f(t, u(t)) - (1 - \lambda)au(t). \tag{1}$$

En este caso, para $\lambda = 0$ el operador de Poincaré es más potable: se trata de resolver el problema

$$u'(t) + au(t) = 0, \qquad u(0) = u_0,$$

cuyas soluciones son

$$u(t) = e^{-at}u_0$$

es decir: $P_0(u_0) = e^{-aT}u_0$, cuyo grado en $B_R(0)$ es 1. Pero no es todo tan fácil: para que esto sirva, hay que probar que las soluciones de (1) con dato inicial $u_0 \in \overline{B_R(0)}$ están definidas en $[0, T]$ y, no contentos con eso, que no existen soluciones $T$-periódicas con $|u_0| = R$.

Claro que a esta altura nos hace ilusión (pongamos) poder echar mano a técnicas de punto fijo más generales: por ejemplo, para Dirichlet uno puede probar que el problema

$$u''(t) = \varphi(t) \qquad u(0) = u(T) = 0$$

tiene, para toda $\varphi \in C([0, T])$, una única solución. Esto no parece un gran logro, aunque permite definir, para cada $v \in C([0, T])$, la función $u(t)$ definida como la única solución del problema

$$u''(t) = f(t, v(t)) \qquad u(0) = u(T) = 0.$$

Esto define un operador $v \mapsto u$ y entonces, con algún teorema de punto fijo o alguna teoría de grado, uno podría aspirar a encontrar algún puntito fijo. Esto no lo podemos hacer todavía, porque hasta ahora trabajamos en dimensión finita; sin embargo ,existe una clase de problemas que ya nos da un *feeling* de lo que ocurre en general. La casa se complace en presentar las *ecuaciones en diferencias.*

## El discreto encanto de los problemas discretos

Las ecuaciones en diferencias tienen aplicaciones diversas, ya sea para modelar ciertos fenómenos como para estudiar problemas continuos vía discretización. Por ejemplo, un modelo de gran actualidad en estos tiempos pandémicos es el SIR (Susceptibles-Infectados-Recuperados) cuya versión discreta es

$$
\begin{cases}
S(n+1) - S(n) &= -\beta I(n)S(n) \\
I(n+1) - I(n) &= (\beta S(n) - \gamma)I(n) \\
R(n+1) - R(n) &= \gamma I(n)
\end{cases}
$$

donde $\beta$ es la velocidad de infección y $\gamma$ se suele llamar *velocidad de remoción*. Si bien el modelo original es continuo, no deja de tener sentido plantearlo de esta forma ya que los datos nos llegan -por ejemplo- una vez al día. Los términos de la izquierda representan la versión discreta de la derivada, que se suele representar por medio del operador $\Delta$, es decir: $\Delta x(n) := x(n+1) - x(n)$. Aquí $x$ es una función definida en algún intervalo de $\mathbb{Z}$, que toma valores en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^d$; por comodidad, podemos escribir directamente $x(n) = x_n$. Un problema de contorno podría ser, por ejemplo, el problema periódico

$$
\begin{cases}
\Delta x_k = f(k, x_k) \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \\
x_N = x_0
\end{cases}
$$

donde $f : \{0, 1, \ldots, N-1\} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es continua o, equivalentemente

$$
\begin{cases}
\Delta x_k = f(k, x_k) & k \in \mathbb{Z} \\
x_{k+N} = x_k & k \in \mathbb{Z}
\end{cases}
$$

donde $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es continua y $N$-periódica en la primera variable. También se puede pensar el problema de Dirichlet

$$
\begin{cases}
\Delta^2 x_k := \Delta(\Delta x_k) = f(k, x_k, \Delta x_k) \quad k = 0, 1, \ldots, N-2 \\
x_0 = 0, \quad x_N = 0
\end{cases}
$$

donde ya se pueden poner a prueba algunas de las cosas que vimos para el caso continuo. Por ejemplo: ¿será igual de fácil probar en este último caso que si $f$ es acotada entonces hay solución? Aquí el camino del shooting parecería funcionar también, aunque uno debe volver a preguntarse todo: ¿hay existencia, unicidad, dependencia continua? Dejamos como ejercicio tan deliciosa tarea porque vamos a probar con nuestro chiche nuevo, el método que insinuamos algunos pasos más arriba. Para eso, sería indiscutiblemente útil poder probar que el problema

$$
\Delta^2 x_k = \varphi(k) \qquad x_0 = x_N = 0
$$

tiene solución única para cualquier $\varphi : \{0, 1, \ldots, N-2\} \to \mathbb{R}$ que se nos ponga en el camino. De ser así, para cada $x : \{0, 1, \ldots, N\} \to \mathbb{R}$ (léase $x \in \mathbb{R}^{N+1}$) podemos considerar $\varphi_x(k) := f(k, x_k, \Delta x_k)$, y sería un placer continuar, si no fuera porque se trata del ejercicio 10 de la práctica 2. Para aquellos que teman a las grandes dimensiones, el problema se puede hacer un poco menos intimidante si consideramos directamente $x \in \mathbb{R}^{N-1}$: a la hora de buscar un punto fijo, da lo mismo suponer ya que $x_0 = 0 = x_N$.

Pero sí vamos a hacer con un poco más de cuidado un problema que viene muy solicitado por las multitudes: soluciones periódicas de una ecuación con retardo. Esta clase de problemas aparece por ejemplo en modelos de dinámica poblacional, donde el retardo suele representar el tiempo que tarda un individuo en madurar: toda la vida, en algunos casos. Pero esto último es algo más que un chiste: a partir de lo que sería el modelo elemental de Malthus con retardo

$$x'(t) = -dx(t) + bx(t-\tau),$$

donde $b$ y $d$ son, respectivamente, la tasa de nacimientos y la tasa de muertes, uno puede incluir en el análisis la probabilidad de que un individuo llegue vivo a la madurez. Si esta probabilidad se modela con una distribución exponencial, queda la *ecuación de Nicholson:*

$$x'(t) = -dx(t) + px(t-\tau)e^{-x(t-\tau)}.$$

Como veremos, con herramientas apropiadas en dimensión infinita, se puede atacar el problema periódico (suponiendo que $d(t)$ y $p(t)$ son funciones periódicas) de dos maneras distintas: una, parecida a la que vimos para ecuaciones ordinarias, mediante el operador de Poincaré. Pero ahora el problema de valores iniciales requiere que el dato sea de la pinta

$$x|_{[-\tau,0]} = \varphi,$$

donde $\varphi$ es una función continua, así que el operador de Poincaré va a estar definido dentro del espacio de Banach $C([-\tau,0])$. La otra manera es trabajar en el espacio $C_T$ de funciones $T$-periódicas e intentar definir algún operador de punto fijo apropiado. En este caso podemos gambetear la resonancia, ya que en realidad el operador lineal asociado es inversible: para cada $y \in C_T$ es fácil ver que el problema

$$x'(t) + d(t)x(t) = p(t)y(t-\tau)e^{-y(t-\tau)}$$

tiene solución única y el operador $y \mapsto x$ resulta continuo. Sin embargo (¡cielos, lo habíamos olvidado!), todavía no contamos con las herramientas apropiadas en dimensión infinita.[1] En cambio, para la ecuación en diferencias ya tenemos todo lo que hace falta: por eso, consideramos el problema

$$\Delta x_k = -d_k x_k + p_k x_{k-\tau} e^{-x_{k-\tau}} \tag{2}$$

donde $d, p \in (0,+\infty)^{\mathbb{Z}}$ son $N$-periódicas y $\tau \in \{0,\dots,N-1\}$. Definimos el conjunto de funciones $N$-periódicas

$$C_N := \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : x_{k+N} = x_k, k \in \mathbb{Z}\},$$

que es isomorfo a $\mathbb{R}^N$. Todavía con la sangre en el ojo, vamos a copiarnos del plan que teníamos para el caso continuo: primero, veamos que el problema lineal asociado tiene solución única (no-resonancia, que le dicen).

[1] Valga la siguiente aclaración para los que olvidaron que el problema surge de un modelo biológico: lo que nos interesa son las soluciones *positivas*. Notar, en particular, que $x \equiv 0$ es solución, de modo que no nos serviría de mucho probar, por ejemplo, que existe alguna solución en $\overline{B_r(0)}$.

**Lema 0.2** *Supongamos $d_k < 1$ para todo $k$. Entonces para toda $\varphi \in C_N$ el problema lineal*

$$\Delta x_k + d_k x_k = \varphi_k$$

*tiene una única solución $N$-periódica dada por*

$$x_k = \frac{1}{1 - \prod_{j=0}^{N-1}(1-d_j)} \sum_{j=k}^{k+N-1} \varphi_j \prod_{s=j+1}^{k+N-1}(1-d_s),$$

*donde por comodidad definimos $\prod_{s=k+N}^{k+N-1}(1-d_s) = 1$.*

<u>*Demostración*</u>: El "veamos" anterior era solo una forma de decir (veamos, dijo el mosquito). En realidad queda como ejercicio que, de paso, sirve para verificar que a nuestra edad todavía nos encontramos en buena forma como para hacer inducción.

□

**Observación 0.3** *En particular, tomando $\varphi = d$ se deduce que*

$$\sum_{j=k}^{k+N-1} d_j \prod_{s=j+1}^{k+N-1}(1-d_s) = 1 - \prod_{j=0}^{N-1}(1-d_j)$$

*para todo $k$.*

**Observación 0.4** *¿Debería uno sorprenderse por la condición $d < 1$? Notemos la diferencia con el caso continuo, para el cual la condición de no-resonancia es otra. En efecto, el problema*

$$x'(t) + d(t)x(t) = \varphi(t)$$

*tiene solución general dada por*

$$x(t) = x_0 e^{-\int_0^t d(s)\,ds} + \int_0^t \varphi(r) e^{-\int_r^t d(s)\,ds}\,dr$$

*de modo que si queremos una solución periódica tenemos que evaluar en $T$ y despejar $x_0$. Esto se puede hacer de forma grácil (y única) siempre que el promedio de $d$ sea distinto de $0$:*

$$x_0\left(1 - e^{-\int_0^T d(s)\,ds}\right) = \int_0^T \varphi(r) e^{-\int_r^T d(s)\,ds}\,dr$$

$$x_0 = \frac{1}{1 - e^{-\int_0^T d(s)\,ds}} \int_0^T \varphi(r) e^{-\int_r^T d(s)\,ds}\,dr.$$

*No es aventurado buscar analogías con la fórmula del lema anterior, con integrales que se transforman en sumas y exponenciales que se vuelven productos. La verdadera condición de no-resonancia, en el lema, es que el producto de todos* *los factores $1-d_k$ sea distinto de 1, pero no debemos olvidarnos de que se trata de un modelo poblacional y $d$ es la tasa de mortalidad por unidad de tiempo. En el modelo continuo, alcanza con pedir $d>0$ para que no haya resonancia y, además, aunque uno suponga que no hay nacimientos la población (idealmente) no se extingue del todo, ya que las soluciones del problema $x'(t)=-d(t)x(t)$ con dato inicial positivo se mantienen siempre positivas. En cambio, en el problema discreto una tasa de mortalidad alta llevaría a la situación -algo incómoda- de poblaciones negativas: en efecto, si $d_k>1$ para cierto $k$ entonces la fórmula $\Delta x_k=-d_kx_k$ nos dice que $x_{k+1}=(1-d_k)x_k$, así que $x_k$ y $x_{k+1}$ tienen signos opuestos.*

Veamos ahora una condición suficiente para la existencia de soluciones periódicas positivas para la ecuación de Nicholson. Nada de bolas centradas en 0: lo que haremos es buscar una solución dentro del subconjunto de $C_N$ de puntos con coordenadas no negativas (llámese "cono").

**Teorema 0.5** *Supongamos $d$ y $p$ positivas y $N$-periódicas tales que para todo $k$ vale $d_k<\min\{1,p_k\}$. Entonces la ecuación (2) tiene solución $N$-periódica positiva.*

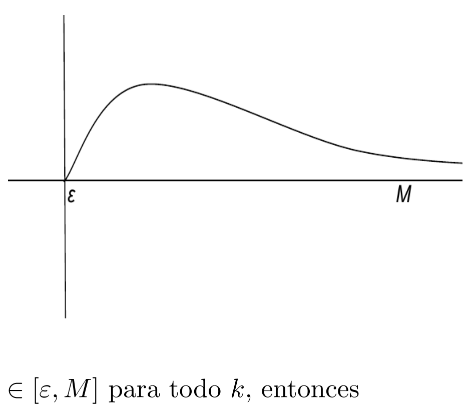
*Demostración*: Definimos el operador de punto fijo $\Phi: C_N\to C_N$ dado por

$$\Phi(x)_k := \frac{1}{1-\prod_{j=0}^{N-1}(1-d_j)}\sum_{j=k}^{k+N-1}\varphi(x)_j\prod_{s=j+1}^{k+N-1}(1-d_s)$$

con $\varphi(x)_j := p_jx_{j-\tau}e^{-x_{j-\tau}}$. Es claro que

$$\Phi(x)_k \le \frac{1}{1-\prod_{j=0}^{N-1}(1-d_j)}\sum_{j=k}^{k+N-1}\frac{p_j}{e}\prod_{s=j+1}^{k+N-1}(1-d_s) := M$$

y tomando $\varepsilon\in(0,M)$ suficientemente chico resulta $xe^{-x}\ge\varepsilon e^{-\varepsilon}$ para todo $x\in[\varepsilon,M]$.




Supongamos $x_k\in[\varepsilon,M]$ para todo $k$, entonces

$$\Phi(x)_k \ge \frac{\varepsilon e^{-\varepsilon}}{1-\prod_{j=0}^{N-1}(1-d_j)}\sum_{j=k}^{k+N-1}p_j\prod_{s=j+1}^{k+N-1}(1-d_s)$$

$$\geq \frac{\varepsilon e^{-\varepsilon}}{1-\prod_{j=0}^{N-1}(1-d_j)} \sum_{j=k}^{k+N-1} r d_j \prod_{s=j+1}^{k+N-1}(1-d_s)$$

para algún $r > 1$. Achicando $\varepsilon$ si hace falta para que valga $re^{-\varepsilon} > 1$, se deduce por la observación anterior que $\Phi(x)_k > \varepsilon$. Por el teorema de Brouwer, existe una solución $x$ tal que $x_k \in [\varepsilon, M]$ para todo $k$.

$\square$

**Pregunta final:** ¿Y el retardo? Bien, gracias: en este modelo, logramos encontrar un punto fijo sin que $\tau$ nos complicara mucho la vida. A modo de ejercicio facilongo, se puede verificar que si en el modelo continuo no hubiera retardo, la existencia de soluciones periódicas cuando $p(t) > d(t)$ saldría en un cerrar y abrir de ojos. Pero ahora volvemos a cerrarlos, al menos hasta la próxima clase.

# References

[1]